MODUL MATEMATIKA TEKNIK

UNIVERSITAS HARAPAN MEDAN
Fakultas Teknik dan Komputer
2022

KATA PENGANTAR

Assalammu'alaikum warahmatullahi wabarakatuh,

Puji Syukur atas kehadirat Allah SWT, berkat Rahmat dan Hidayah-Nya, penulis mampu menyelesaikan modul ini dalam tempo 10 hari. Adapun tujuan dari modul ini adalah untuk membantu mahasiswa Universitas Harapan Medan Fakultas Teknik dan Komputer pada program studi Teknik Mesin selama menempuh ilmu di Universitas Harapan Medan. Mahasiswa diharapkan dapat memahami bahwasannya matematika merupakan salah satu alat analisis yang digunakan untuk memecahkan suatu masalah pada bidang mekanika. Dengan menggunakan bahasa yang sederhana, penulis berharap mahasiswa dapat memahami dengan baik setiap uraian dalam modul ini.

Menyadari keterbatasan pada modul ini, dengan segala kerendahan hati penulis memohon maaf jika terdapat kekurangan-kekurangan dalam uraian yang disajikan. Penulis bersedia menerima kritik maupun saran yang positif dan konstruktif dari para pembaca untuk perbaikan kedepannya. Semoga modul ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa, para dosen, pimpinan program studi, dan seluruh divisi Fakultas Teknik dan Komputer Universitas Harapan Medan. Akhir kata penulis ucapkan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah ikut berkontribusi terbentuknya modul ini, semoga modul ini dapat memberikan keberkahan bagi siapapun yang menggunakannya.

Wassalammualaikum warahmatullahi wabarakatuh..

Tebing Tinggi, 8 Desember 2022

SITI SUAIBAH NST, M. SI

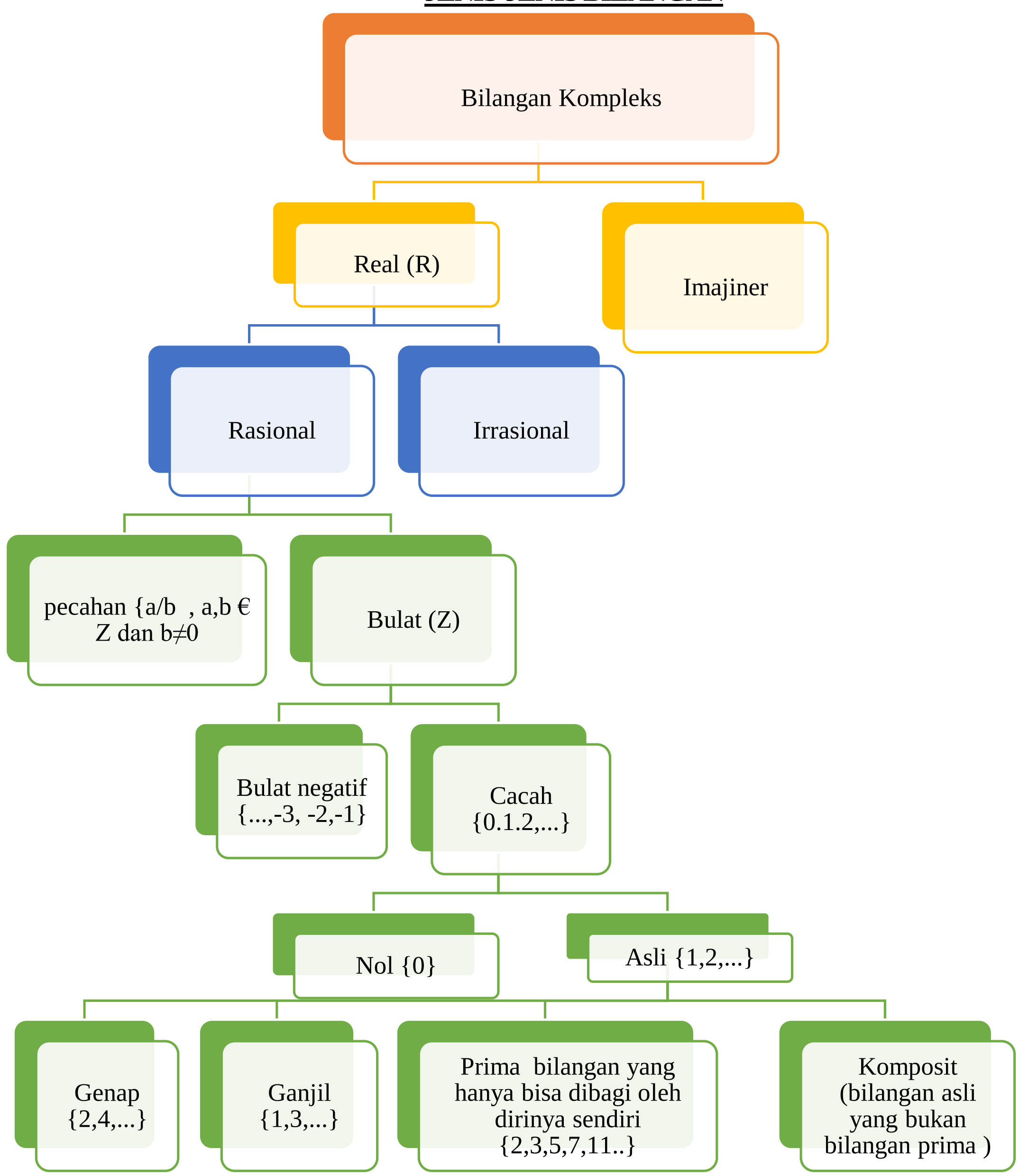
DAFTAR ISI

BAB I
ARITMATIKA

1. JENIS-JENIS BILANGAN

Matematika menjadi salah satu bidang keilmuan yang eksistensinya tidak dapat kita pisahkan dengan kehidupan kita. Dalam matematika dasar terdapat sebuah kosep yang digunakan dalam pengukuran maupun pencacahan, konsep tersebut kita kenal dengan istilah bilangan. Bilangan merupakan suatu konsep yang memberikan nilai jumlah terhadap segala sesuatu yang dihitung.

JENIS-JENIS BILANGAN



2. HUKUM DASAR ARITMATIKA

Semua pekerjaan yang telah anda lakukan sampai sejauh ini dilakukan dengan asumsi bahwa anda telah mengetahui aturan-aturan mengenai penggunaan operasi aritmatika. Namun demikian terdapat perbedaan antara mengetahui aturan itu saja dan menyadari keberadaan aturan-aturan tersebut.

2.1 Komutatif

Dua buah bilangan bulat dapat dijumlahkan atau dikalikan dalam urutan manapun tanpa mempengaruhi hasilnya. Sebagai contoh :

$$5 + 8 = 8 + 5 = 13$$
$$5 \times 8 = 8 \times 5 = 40$$

Kita katakan bahwa penjumlahan dan perkalian adalah operasi komutatif

Selanjutnya urutan pengurangan dan pembagian dua bilangan bulat mempengaruhi hasilnya. Sebagai contoh :

$$4 - 2 = 2 - 4$$
$$4 \div 2 \neq 2 \div 4$$

Kita katakan bahwa pengurangan dan pembagian bukanlah operasi komutatif

2.2 Asosiatif

Cara yang digunakan untuk mengasosiasikan tiga atau lebih bilangan bulat dengan penjumlahan atau perkalian tidak mempengaruhi nilainya. Sebagai contoh :

$$3 + (4 + 5) = (3 + 4) + 5 = 3 + 4 + 5 = 12$$
$$3 \times (4 \times 5) = (3 \times 4) \times 5 = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

Kita katakan bahwa penjumlahan dan perkalian adalah operasi Asosiatif

Cara yang digunakan untuk mengasosiasikan tiga atau lebih bilangan bulat dengan pengurangan atau pembagian akan mempengaruhi nilainya. Sebagai contoh :

$$3 - (4 - 5) \neq (3 - 4) - 5$$
$$24 \div (4 \div 2) \neq (24 \div 4) \div 2$$

Kita katakan bahwa pengurangan dan pembagian bukanlah operasi Asosiatif

2.3 Distributif

Perkalian didistribusikan pada operasi penjumlahan dan pengurangan dari kiri atau kanan. Sebagai contoh :

$3 \times (4+5) = (3 \times 4) + (3 \times 5) = 27\ dan\ (3+4) \times 5 = (3 \times 5) + (4 \times 5) = 35$

$3 \times (4-5) = (3 \times 4) - (3 \times 5) = -3\ dan\ (3-4) \times 5 = (3 \times 5) - (4 \times 5) = -5$

Pembagian didistribusikan pada operasi penjumlahan dan pengurangan dari kanan tetapi tidak dari kiri. Sebagai contoh :

$$(60+15) \div 5 = (60 \div 5) + (15 \div 5) = 15$$

$$(20-10) \div 5 = (20 \div 5) - (10 \div 5) = 2$$

Akan tetapi :

$$60 \div (15+5) \neq (60 \div 15) + (60 \div 5)$$
$$20 \div (10-5) \neq (20 \div 10) - (20 \div 5)$$

3. PECAHAN

Pecahan atau yang disebut fraksi ialah istilah dalam matematika yang memiliki bentuk $\frac{a}{b}, b \neq 0$. Dalam hal ini a adalah pembilang dan b adalah penyebut. Jika suatu bilangan cacah dipisahkan menjadi beberapa pecahan dimana setiap pecahan memiliki penyebut yang sama, pembilang pecahan akan membentuk rasio. Jika sejumlah air garam dalam tangki mengandung $\frac{1}{3}$ garam dan $\frac{2}{3}$ air maka rasio garam dan air adalah 1 : 2. Selanjutnya jika terdapat sebuah pertanyaan berapakah rasio yang dibentuk komponen A, B, dan C jika suatu senyawa mengandung $\frac{3}{4}$ dari A, $\frac{1}{6}$ dari B, dan $\frac{1}{12}$ dari C ? Dengan menyamakan KPK maka diperoleh jawaban dari soal tersebut adalah 9 : 2 : 1. Selanjutnya rasio yang dinyatakan sebagai pecahan dari 100 disebut persentase. Jika 13 diantara 100 mobil pada jalur perakitan bewarna merah, persentase mobil merah pada jalur tersebut adalah $\frac{13}{100}$ atau ditulis dalam persen 13%.

4. BILANGAN RASIONAL, IRRASIONAL, DAN REAL

Suatu bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan disebut bilangan rasional. Sedangkan bilangan irrasional adalah bilagan yang tidak dapat dinyatakan sebagai pecahan dan memiliki bentuk desimal yang terdiri atas untaian numeral yang takhingga dan memperlihatkan pola berulang. Sebagai akibatnya kita tidak mungkin untuk menulis bentuk desimal lengkapnya maupun merancang format desimal sederhananya. Alih - alih kita hanya dapat melakukan pembulatan jumlah tertentu angka dibelakang koma. Kita mungkin saja memiliki representasi berbetuk numeral untuk bilangan irrasional seperti $\sqrt{2}, e\ atau\ \pi$. Sementara itu kumpulan bilangan rasional dan irrasional disebut sebagai bilangan real.

5. PANGKAT

Pangkat adalah istilah dalam matematika yang menyatakan perkalian berulang. Berikut beberapa hukum pemangkatan :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$

  Contoh : $5^4 \times 5^2 = 5^{4+2} = 5^6$

- $a^m \div a^n = a^{m-n}$

  Contoh : $5^4 \div 5^2 = 5^{4-2} = 5^2$

- $(a^m)^n = a^{m \times n}$

  Contoh : $(5^2)^4 = 5^{2\times 4} = 5^4$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

  Contoh : $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

  Contoh : $\sqrt{2^4} = 2^{4/2} = 2^2 = 4$

LATIHAN

1. Letakkanlah simbol < atau > yang sesuai diantara setiap pasangan bilangan berikut :
   a. 2^{-3} ... $\frac{2}{4}$
   b. $\frac{5}{7}$ ... $\frac{3}{4}$
   c. 4^{-2} ... 2^{4}
   d. -8 … -12

2. Pada masing - masing soal berikut diketahui proporsi suatu gabungan. Carilah rasio masing - masing komponennya dalam kasus - kasus berikut :
   a. $\frac{3}{4}\ dari\ A\ dan\ \frac{1}{4}\ dari\ B$
   b. $\frac{2}{3}\ dari\ P\ dan\ \frac{1}{15}\ dari\ Q$

3. Tentukan nilai dari :
   a. $8^4 \times 8^3$
   b. $2^9 \div 8^2$
   c. $(5^3)^5$
   d. $\sqrt{4} \times \sqrt[3]{4^2}$

4. Tentukan nilai dari masing - masing soal berikut :
   a. $\frac{9}{2} \div \frac{3}{2}$
   b. $\frac{6}{7} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4}$

5. Carilah nilai dari masing - masing soal berikut :
   a. $11^{\frac{1}{4}}$
   b. $\sqrt[7]{3}$
   c. $-81^{\frac{1}{5}}$

BAB II
PERSAMAAN LINEAR SIMULTAN

Persamaan linear dengan suatu variabel (anu) tunggal melibatkan pangkat - pangkat variabel yang tidak lebih tinggi daripada pangkat pertama.

1. PENYELESAIAN PERSAMAAN SEDERHANA

Penyelesaian persamaan sederhana pada dasarnya berupa penyederhanaan pernyataan pada setiap sisi persamaan tersebut untuk memperoleh suatu persamaan yang berbentuk :

$ax + b = cx + d$ yang menghasilkan $ax - cx = d - b$ sehingga $x = \frac{d-b}{a-c}$ dimana $a \neq c$.

Contoh :

$$6x + 7 + 5x - 2 + 4x - 1 = 36 + 7x$$

$$15x + 4 = 7x + 36$$

$$15x - 7x = 36 - 4$$

$$8x = 32$$

$$x = 4$$

2. PERSAMAAN LINEAR SIMULTAN DENGAN DUA ANU (VARIABEL)

Suatu persamaan linear dalam dua variabel memiliki sejumlah penyelesaian yang takhingga. Sebagai contoh persamaan linear dua variabel $y - x = 3$ dapat ditranspos menjadi $y = x + 3$. Salah satu dari sejumlah nilai x yang takhingga itu dapat disubstitusikan kedalam persamaan ini dan masing-masing memiliki nilai y yang berkorespons. Akan tetapi, untuk dua persamaan yang seperti itu mungkin saja terdapat sepasang nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan secara simultan.

2.1 Metode substitusi

$5x + 2y = 14$ … (1)

$3x - 4y = 24$ … (2)

Dari persamaan (1) diperoleh $y = \frac{14-5x}{2}$ atau samalah itu dengan $y = 7 - \frac{5x}{2}$.

Kemudian substitusikan kedalam persamaan (2) sebagai berikut :

$3x - 4y = 24$

$3x - 4\left(7 - \frac{5x}{2}\right) = 24$

$3x - 28 + 10x = 24$

$13x = 24 + 28$

$13x = 52$

$x = 4$

Jika kia kembali substitusikan $x = 4$ kepersamaan lainnya maka akan dihasilkan nilai y sebagai berikut:

$5x + 2y = 14$
$5(4) + 2y = 14$
$2y = 14 - 20$
$2y = -6$
$y = -3$

Untuk melakukan pemeriksaan kita dapat mensubstitusikan kembali nilai *x* dan *y* pada persamaan (1) dan persamaan (2).

2.2 Metode Eliminasi

$5x + 2y = 14$ … (1)
$3x - 4y = 24$ … (2)

$5x + 2y = 14$ | x 2
$3x - 4y = 24$ | x 1

$$\begin{array}{rl} 10x + 4y &= 28 \\ 3x - 4y &= 2 \\ \hline 13x \quad &= 52 \\ x \quad &= 4 \end{array} \; +$$

$5x + 2y = 14$ | x 3
$3x - 4y = 24$ | x 5

$$
\begin{array}{r}
15x + 6y \quad = \quad 42 \\
15x - 20y = 120 \\
\hline
26y \ = -78 \\
y \ = -3
\end{array}
\quad -
$$

2.3 Metode Substitusi Eliminasi

$5x + 2y = 14 \ldots$ (1)

$3x - 4y = 24 \ldots$ (2)

$5x + 2y = 14$ | x 3

$3x - 4y = 24$ | x 5

$$
\begin{array}{r}
15x + 6y \quad = \quad 42 \\
15x - 20y = 120 \\
\hline
26y \ = -78 \\
y \ = -3
\end{array}
\quad -
$$

Kemudian kita substitusikan nilai $y = -3$ pada salah satu persamaan.

$3x - 4y = 24$

$3x - 4(-3) = 24$

$3x = 24 - 12$

$3x = 12$

$x = 4$

3. PERSAMAAN LINEAR SIMULTAN DENGAN TIGA ANU (VARIABEL)

Persamaan linear simultan dengan tiga anu dan tiga persamaan hanyalah merupakan perluasan dari cara yang dilakukan untuk dua anu (variabel).

3.1 Metode substitusi Eliminasi

$3x + 2y - z = 19 \ldots$ (1)

$4x - y + 2z = 4 \ldots$ (2)

$2x + 4y - 5z = 32 \ldots$ (3)

Eliminasi Persamaan (1) dan (2)

$3x + 2y - z = 19 \quad | \text{ x } 1$

$4x - y + 2z = 4 \quad | \text{ x } 2$

$$
\begin{array}{l}
3x + 2y - z = 19 \\
8x - 2y + 4z = 8 \\
\hline
11x + 3z = 27 \ldots (4)
\end{array}
\quad +
$$

Eliminasi Persamaan (1) dan (3)

$3x + 2y - z = 19 \quad | \text{ x } 2$

$2x + 4y - 5z = 32 \quad | \text{ x } 1$

$$
\begin{array}{l}
6x + 4y - 2z = 38 \\
2x + 4y - 5z = 32 \\
\hline
4x + 3z = 6 \ldots (5)
\end{array}
\quad -
$$

Eliminasi Persamaan (4) dan (5)

$$
\begin{array}{l}
11x + 3z = 27 \\
4x + 3z = 6 \\
\hline
7x = 21
\end{array}
\quad -
$$

$$x = 3$$

Substitusi $x = 3$ ke dalam persamaan (4) atau persamaan (5).

$11x + 3z = 27$

$11(3) + 3z = 27$

$33 + 3z = 27$

$3z = -6$

$z \quad = -2$

Substitusi $x = 3$ dan $z = -2$ ke dalam persamaan (1), persamaan (2) atau persamaan (3) seperti berikut:

$4x - y + 2z = 4$

$4(3) - y + 2(-2) = 4$

$12 - y - 4 = 4$

$-y = 4 - 8$

$-y = -4$

$y = 4$

3.2 Metode Eliminasi Gauss

Dalam matematika, eliminasi Gauss adalah algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Algoritma ini terdiri dari serangkaian operasi yang dilakukan pada matriks koefisien dari sistem persamaan tersebut. Walaupun akan mengubah bentuk matriks, namun operasi-operasi tersebut tidak akan mengubah solusi dari sistem persamaan.

$3x + 2y - z = 19$ … (1)

$4x - y + 2z = 4$ … (2)

$2x + 4y - 5z = 32$ … (3)

Tiga persamaan di atas kita ubah kedalam bentuk matriks seperti berikut :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 19 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -5 & 32 \end{vmatrix} R_1 - R_3$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -13 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -5 & 32 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 2R_1 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -13 \\ 0 & 7 & -14 & 56 \\ 0 & 8 & -13 & 58 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ R_2\,/7 \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & -13 & 58 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ R_2/7 \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 8 & -13 & 58 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ 8R_2 - R_3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ R_3\,/-3 \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{l} R_1 - 4R_3 \\ R_2 + 2R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right| \begin{array}{l} R_1 + 2R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right|$$

Setelah matriks di atas membentuk matriks identitas diperoleh nilai *x*, *y*, dan *z* pada kolom keempat yaitu :

$$x = 3 \; ; y = 4 \; ; dan \; z = -2$$

LATIHAN

1. Selesaikan persamaan linear berikut :
   a. $4(x+5)-6(2x+3)=3(x+14)-2(5-x)+9$
   b. $\frac{2x+1}{3}-\frac{2x+5}{5}=2+\frac{x-1}{6}$
2. Selesaikanlah pasangan persamaan simultan berikut :
   a. $2x+3y=7$
      $5x-2y=8$
   b. $4x+2y=5$
      $3x+\ \ y=9$
3. Selesaikanlah persamaan linear simultan berikut :
   $$\frac{3x-2y}{2}=\frac{2x+y}{7}+\frac{3}{2}$$
4. Selesaikanlah ketiga pasangan persamaan dalam tiga anu (variabel) berikut :
   $2x+3y-z=-5$
   $x-4y+2z=21$
   $5x+2y-3z=-4$
   a. Menggunakan metode substitusi eliminasi
   b. Menggunakan metode Eiminasi Gauss
   c. Menggunakan MS.EXCEL
5. Selesaikanlah ketiga pasangan persamaan dalam tiga anu (variabel) berikut :
   $2x+5y+3z=6$
   $x+2y+3z=1$
   $x+3z=-6$
   a. Menggunakan metode substitusi eliminasi
   b. Menggunakan metode Eiminasi Gauss
   c. Menggunakan MS.EXCEL

BAB III
PERSAMAAN POLINOMIAL

1. PERSAMAAN KUADRATIK $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$

1.1 Penyelesaian dengan faktor-faktor

Conoh :

Tentukan faktorisasi dari $x^2 + 5x - 14 = 0$

Dari soal di atas kita dapat memfaktorkan persamaan tersebut sebagai berikut :

$(x + 7)(x - 2) = 0$

Persamaan ini terpenuhi jika salah satu faktor bernilai 0.

$x + 7 = 0 \; atau \; x - 2 = 0$

Yang artinya $x = -7 \; atau \; x = 2$

1.2 Penyelesaian dengan melengkapi kuadratnya

Sebagian persamaan kuadratik tidak dapat difaktorisasi menjadi dua faktor sederhana. Dalam hal ini, metode penyelesaian lain harus digunakan.

Contoh :

Selesaikanlah $x^2 - 6x - 4 = 0$

$x^2 - 6x = 4$

Selanjutnya tambahkan pada kedua sisi, kuadrat dari setengah koefisien *x* :

$x^2 - 6x + \; (-3)^2 = 4 + (-3)^2$

$x^2 - 6x + 9 = 13$

$(x-3)^2 = 13$

$x - 3 = \sqrt{13}$

$x = \pm\sqrt{13} + 3$

$x = 6{,}606\ atau\ x = -0{,}606$

1.3 Penyelesaian dengan Rumus *ABC*

Jika anda menemukan soal persamaan kuadratik yang tidak dapat diselesaikan dengan kedua metode di atas anda dapat melakukan metode ini.

Rumus : $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Contoh :

Selesaikanlah $2x^2 - 3x - 4 = 0$

$a = 2\ , b = -3, c = -4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$x_{1,2} = -0{,}851\ atau\ 2{,}351$

2. PERSAMAAN KUBIK YANG MEMILIKI SEDIKITNYA SATU FAKTOR LINEAR DALAM PERNYATAAN ALJABARNYA

Pada metode ini kita akan menggunakan teorema sisa dan teorema faktor serta penentuan nilai fungsi polinomial dengan pengurungan.

Contoh :

Selesaikanlah $2x^3 - 11x^2 + 18x - 8 = 0$

Langkah pertama ialah mencari faktor linearnya dengan menuliskan $f(x)$ dalam bentuk berkurung sebagai berikut :

$f(x) = [(2x - 11)x + 18]x - 8$

Sekarang kita mencari suatu nilai untuk *x*, $(x = k)$ yang menghasilkan sisa nol pada pembagiannya $(x - k)$. oleh sebab itu kita menentukan nilai *f(1), f(-1), f(2),…dst.*

$f(-1) = 39$ karena hasil $f(x) \neq 0$ maka $(x - k) atau\ (x + 1)$ bukanlah faktor dari *f (x)*

$f(1) = 1$ karena hasil $f(x) \neq 0$ maka $(x - k) atau\ (x - 1)$ bukanlah faktor dari *f (x)*

$f(2) = 0$ karena hasil $f(x) = 0$ maka $(x - k) atau\ (x - 2)$ adalah faktor dari *f (x)*

Selanjutnya kita membagi *f (x)* dengan *(x – 2)* untuk menentukan faktor sisanya seperti berikut :

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 7x + 4 \\
\hline
x - 2 & 2x^3 - 11x^2 + 18x - 8 \\
 & \underline{2x^3 - 4x^2} \quad - \\
 & \quad -7x^2 + 18x \\
 & \quad \underline{-7x^2 + 14x} \quad - \\
 & \qquad 4x - 8 \\
 & \qquad \underline{4x - 8} \quad - \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}$$

Sehingga $(x - 2)(2x^2 - 7x + 4) = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Yang akan menghasilkan $x = 2$, $x = 0{,}719, atu\ x = 2{,}781.$

3. **PERSAMAAN KUARTIK YANG MEMILIKI SEDIKITNYA DUA FAKTOR LINEAR DALAM FUNGSI ALJABARNYA**

Hampir sama dengan persamaan kubik, perbedaan dalam kasus ini kita harus menentukan dua faktor linear sederhana untuk *f (x).*

Contoh :

$4x^4 - 19x^3 + 24x^2 + x - 10 = 0$

$f(x) = \{[(4x - 19)x + 24]x + 1\}x - 10 = 0$

Sekarang kita mencari suatu nilai untuk *x*, $x = k$ yang menghasilkan sisa nol pada pembagiannya $x - k$. oleh sebab itu kita menentukan nilai *f(1), f(-1), f(2),…dst.* Selanjutnya diperoleh $f(1) = 0$ artinya $x - 1$ merupakan faktor dari *f (x).*

$$
\begin{array}{r l}
 & 4x^3 - 15x^2 + 9x + 10 \\
x - 1 \,/ & 4x^4 - 19x^3 + 24x^2 + x - 10 \\
 & \underline{4x^4 - 4x^3} \quad - \\
 & -15x^3 + 24x^2 \\
 & \underline{-15x^3 + 15x^2} \quad - \\
 & 9x^2 + x \\
 & \underline{9x^2 - 9x} \quad - \\
 & 10x - 10 \\
 & \underline{10x - 10} \quad - \\
 & 0
\end{array}
$$

Sehingga $(x - 1)\,(4x^3 - 15x^2 + 9x + 10) = 0$

Kita harus lakukan pembagian ulang untuk $4x^3 - 15x^2 + 9x + 10 = 0$ dimana :

$[(4x - 15)x + 9]x + 10 = 0$

$f(2) = 0$ artinya $(x - 2)$ merupakan faktor dari *f (x).*

Pembagian $f(x)$ dengan $(x-2)$ dengan pembagian lengkap seperti di atas akan menghasilkan $4x^2-7x-5$. Selanjutnya penyelesaian kuadratik ini dengan menggunakan rumus *ABC* akan menghasilkan penyelesaian $x=-0{,}545\ atau\ x=2{,}295$.

Sehingga diperoleh hasil $x=1, x=2, x=-0{,}545, atau\ x=2{,}295$

LATIHAN

1. Selesaikanlah persamaan – persamaan berikut dengan metode faktor :
   a. $x^2 + 3x - 40 = 0$
   b. $x^2 - 11x + 28 = 0$
   c. $x^2 + 10x + 24 = 0$

2. Selesaikanlah persamaan – persamaan berikut dengan metode faktor :
   a. $5x^2 + 8x + 2 = 0$
   b. $8x^2 + 11x - 3 = 0$
   c. $7x^2 + 4x - 5 = 0$

3. Selesaikanlah persamaan – persamaan kubik berikut :
   a. $5x^3 + 14x^2 + 7x - 2 = 0$
   b. $3x^3 - 2x^2 - 21x - 10 = 0$
   c. $4x^3 - 7x^2 - 17x + 6 = 0$

4. Selesaikanlah persamaan – persamaan kuartik berikut :
   a. $2x^4 - 4x^3 - 23x^2 - 11x + 6 = 0$
   b. $2x^4 + 14x^3 + 33x^2 + 31x + 10 = 0$
   c. $5x^4 - 12x^3 - 6x^2 + 17x + 6 = 0$

BAB IV
PECAHAN PARSIAL

Untuk menyederhanakan suatu pernyataan aritmatik yang terdiri dari sejumlah pecahan, kita pertama mengubah masing - masing pecahan menjadi bentuk baru berdasarkan KPK.

Contoh :

$$\frac{8x-28}{x^2-6x+8}=\cdots$$

$$\frac{8x-28}{x^2-6x+8}=\frac{8x-28}{(x-2)(x-4)}$$

Selanjutnya kita asumsikan bahwa setiap faktor sederhana pada penyebutnya menghasilkan pecahan parsial tunggal. Kita dapat tuliskankan seperti berikut :

$$\frac{8x-28}{(x-2)(x-4)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-4)}$$

Dimana *A* dan *B* adalah konstanta. Kita sekarang akan melihat bahwa asumsi ini valid dengan mencari nilai - nilai untuk *A* dan *B*.

$$\frac{8x-28}{(x-2)(x-4)}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$

$$8x-28=A(x-4)+B(x-2)$$

Karena ini merupakan suatu identitas, maka identitas ini harus berlaku untuk semua nilai *x*. Akan lebih mudah apabila kita memilih suatu nilai *x* yang membuat salah satu tanda kurungnya bernilai nol.

$$x=4\ \rightarrow 8(4)-28=A(4-4)+B(4-2)$$

Maka akan menghasilkan nilai $B=2$

$$x=2\ \rightarrow 8(2)-28=A(2-4)+B(2-2)$$

Maka akan menghasilkan nilai $A = 6$

Sehingga hasil akhir pecahan parsial yang diinginkan adalah sebagai berikut :

$$\frac{8x - 28}{(x-2)(x-4)} = \frac{6}{(x-2)} + \frac{2}{(x-4)}$$

Syarat penting yang harus dipahami bahwa untuk mendapatkan uraian pecahan parsial dari sebuah pernyataan aljabar bilangan rasional maka derajat pembilangnya harus lebih rendah dari derajat penyebutnya. Jika dalam pernyataan aljabar rasional aslinya, derajat pembilang tidak lebih rendah daripada derajat penyebutnya maka kita membaginya secara lengkap.

Contoh :

Nyatakanlah $\frac{x^2+3x-10}{x^2-2x-3}$ dalam pecahan parsialnya !

Apakah derajat pembilangnya lebih rendah dari derajat penyebutya ? jawabannya tidak, sehingga kita harus membaginya seperti berikut :

$$\begin{array}{rl} & \quad 1 \\ x^2 - 2x - 3 \big/ & \overline{x^2 + 3x - 10} \\ & \underline{x^2 - 2x - 3} \;\; - \\ & \quad 5x - 7 \end{array}$$

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x - 3} = 1 + \frac{5x - 7}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x - 3} = 1 + \frac{5x - 7}{(x+1)(x-3)}$$

Pecahan sisanya akan berupa pecahan parsial yang berbentuk :

$$\frac{5x - 7}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-3)}$$

$$\frac{5x - 7}{(x+1)(x-3)} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

$5x - 7 = A(x-3) + B(x+1)$ merupakan suatu identitas, karena sisi kanan merupakan peryataan sisi kiri yang ditulis dalam bentuk lain. Dengan cara yang sama seperti di atas, kita asumsikan nilai *x* yang memenuhi sehingga diperoleh $A = 3\ dan\ B = 2$ sehingga memperoleh :

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - 2x - 3} = 1 + \frac{3}{(x+1)} + \frac{2}{(x-3)}$$

LATIHAN

Nyatakanlah setiap soal berikut dalam pecahan parsial :

1. $\frac{7x+36}{x^2+12x+32}$

2. $\frac{5x-2}{x^2-3x-28}$

3. $\frac{12x-16}{(4x-5)^2}$

4. $\frac{35x+17}{(5x+2)^2}$

5. $\frac{4x^2+31x+5}{x^2-13x+40}$

BAB V
TRIGONOMETRI

1. SUDUT

1.1 ROTASI

Apabila suatu garis lurus dirotasi terhadap satu titik, garis tersebut akan menyapu suatu sudut yang dapat diukur dalam derajat atau radian. Suatu garis lurus yang berotasi satu sudut penuh dan kembali keposisi awalnya dikatakan telah dirotasi melalui $360°$dimana setiap derajat dibagi menjadi 60 menit $60^{'}$ dan setiap menit dibagi lagi menjasi 60 detik $60^{''}$. Sudut lurus adalah separuhnya yaitu $180°$ dan sudut siku separuh lagi dari sudut lurus yaitu $90°$. Sudut yang lebih kecil dari $90°$ disebut sudut lancip dan sudut yang lebih besar dari $90°$disebut sudut tumpul. Suatu sudut yang diukur dalam derajat, menit, dan detik dapat dikonversi ke derajat desimal sebagai berikut :

$45°36^{'}18^{''} = 45° + \left(\frac{36}{60}\right)° + \left(\frac{18}{60\times 60}\right)°$

$45°36^{'}18^{''} = (45 + 0{,}6 + 0{,}005)°$

$45°36^{'}18^{''} = 45{,}605°$

Bagaimana sebaliknya ?

Misal konversilah $18{,}478^{\circ}$ menjadi derajat, menit, dan detik !

$18{,}478° = 18° + (0{,}478 \times 60)'$

$18{,}478° = 18° + 28{,}68'$

$18{,}478° = 18° + 28' + (0{,}68 \times 60)''$

$18{,}478° = 18° + 28' + 40{,}8''$

$18{,}478° = 18°\, 28'41''$

1.2 RADIAN

Satuan lain untuk ukuran sudut adalah radian. Jika garis lurus yang panjangnya *r* berotasi pada salah satu ujungnya sehingga ujung lain membentuk busur yang panjangnya *r*, garis tersebut dikatakan telah dirotasi melalui 1 radian (1 rad).

$$360^\circ = 2\pi\, rad$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360}\ rad = \frac{\pi}{180}\ rad$$

$$90^\circ = \frac{2\pi}{4}\ rad = \frac{\pi}{2}\ rad$$

$$120^\circ = \frac{2\pi}{3}\ rad$$

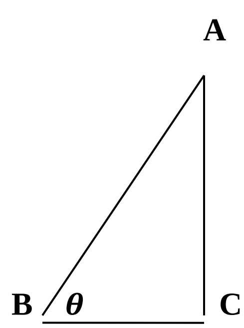
$$2\pi\ rad = 360^\circ$$

$$1\ rad = \frac{360}{2\pi} = \frac{180}{\pi}$$

$$\frac{\pi}{3}\ rad = \frac{180}{\pi} \times \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\frac{7\pi}{4}\ rad = \frac{180}{\pi} \times \frac{7\pi}{4} = 315^\circ$$

2. RASIO TRIGONOMETRIK



$$\boldsymbol{AB = Miring = Hipotenusa}$$

$$sin\ \theta = \frac{depan}{miring} = \frac{AC}{AB}$$

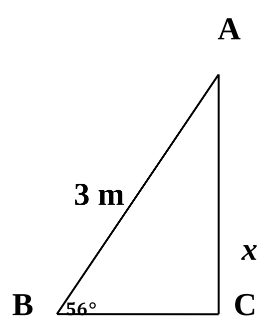
$$cos\ \theta = \frac{samping}{miring} = \frac{BC}{AB}$$

$$tan\ \theta = \frac{depan}{samping} = \frac{AC}{BC}$$

2.1 Rasio Kebalikan

$$\frac{1}{sin\ \theta} = cosec\ \theta$$
$$\frac{1}{cos\ \theta} = sec\ \theta$$
$$\frac{1}{tan\ \theta} = cot\ \theta = \frac{cos\ \theta}{\sin\theta}$$

Contoh :



Tentukan nilai *x* !

$$sin\ \theta = \frac{depan}{miring} = \frac{AC}{AB}$$

$$sin\ 56^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{3}$$

$$x = 3\sin 56^\circ$$

$x = 2,49$

2.2 Teorema Phytagoras

Menjumlahkan kuadrat panjang dua sisi yang lebih pendek sama dengan kuadrat sisi yang terpanjang maka segitiga tersebut adalah segitiga siku-siku.

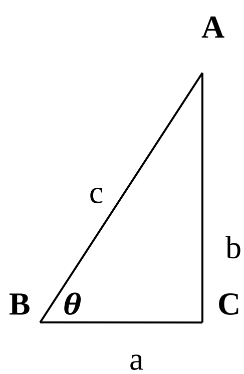
Contoh :

Apakah segitiga dengan sisi 7, 24, dan 25 merupakan segitiga siku-siku ?

$7^2 + 24^2 = 25^2$

$49 + 576 = 625$

Kesimpulannya segitiga dengan sisi tersebut adalah segitiga siku-siku.



$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

$$\boldsymbol{a^2 = c^2 - b^2}$$

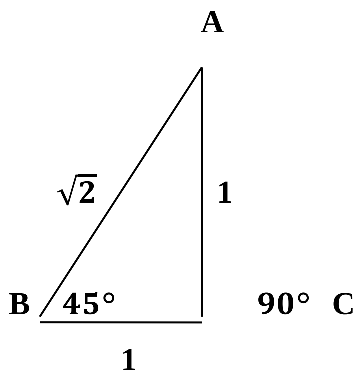
$$\boldsymbol{a = \sqrt{c^2 - b^2}}$$

2.3 Segitiga – segitiga khusus

Dua segitiga siku-siku mendapat perhatian khusus karena rasio trigonometrik sudut-sudutnya diberikan dalam bentuk bilangan *irrasional* atau dalam bentuk pecahan.

Segitiga siku – siku sama kaki

Sudut – sudutnya adalah $90°, 45°, dan\ 45°$ yang oleh sebab itu panjang sisinya memiliki rasio $1:1:\sqrt{2}$



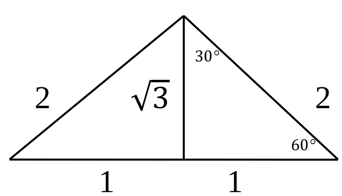
$$sin\ 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$cos\ 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$tan\ 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{1} = 1$$

Segitiga Sama Sisi

Memiliki rasio $1 : \sqrt{3} : 2$



$$sin\ 30° = \frac{1}{2}$$

$$cos\ 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$tan\ 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$sin\ 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

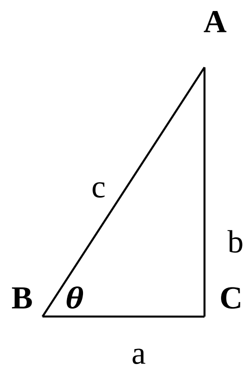
$$cos\ 60° = \frac{1}{2}$$

$$tan\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Tabel Trigonometrik

	sin	**cos**	**tan**
0	0	1	0
30	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	1	0	~

3. IDENTITAS TRIGONOMETRIK



Diketahui segitiga siku – siku pada gambar di atas dengan titik – titik sudut *A, B,* dan *C,* sisi – sisi yang berhadapan adalah dengan sudut – sudut tersebut ialah *a, b,* dan *c.* serta sudut θ di *B* maka :

- $a^2 + b^2 = c^2$ (sisi kiri dan kanan kemudian masing – masing dibagi c^2)

  $$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$
  $$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

- $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$ (sisi kiri dan kanan kemudian masing – masing dibagi $cos^2\theta$), sehingga :

$$\frac{cos^2\theta}{cos^2\theta}+\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}=\frac{1}{cos^2\theta}$$

$$1+\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}=\frac{1}{cos^2\theta}$$

$$1+\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}=sec^2\theta$$

$$1+tan^2\theta=sec^2\theta$$

- $cos^2\theta+sin^2\theta=1$ (sisi kiri dan kanan kemudian masing – masing dibagi $sin^2\theta$), sehingga :

$$\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}+\frac{sin^2\theta}{sin^2\theta}=\frac{1}{sin^2\theta}$$

$$\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}+1=\frac{1}{sin^2\theta}$$

$$\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta}+1=cossec^2\theta$$

$$\cot\theta+1=cossec^2\theta$$

- $\frac{1}{1-cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=2cosec^2\theta$

$$\frac{1}{1-cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$

$$\frac{1}{1-cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{2}{(1-cos^2\theta)}$$

Mengingat $sin^2\theta+cos^2\theta=1$

$1-cos^2\theta=sin^2\theta$ sehinga :

$$\frac{1}{1-cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=\frac{2}{sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{1-cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=2\times\frac{1}{sin^2\theta}$$

$$\frac{1}{1-cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=2cossec^2\theta$$

- $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\ cossec\ \theta$

  $$\tan\theta + \cot\theta = \frac{sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

  $$\tan\theta + \cot\theta = \frac{sin^2\theta + cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

  $$\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

  $$\tan\theta + \cot\theta = \frac{1}{\sin\theta} \times \frac{1}{\cos\theta}$$

  $$\tan\theta + \cot\theta = cossec\ \theta \sec\theta$$

- $tan^2\theta - sin^2\theta = sin^4\theta sec^2\theta$

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = \frac{sin^2\theta}{cos^2\theta} - sin^2\theta$$

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = sin^2\theta\frac{1}{cos^2\theta} - sin^2\theta$$

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = sin^2\ sec^2\ \theta - sin^2\theta$$

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = sin^2(sec^2\theta - 1)$$

  Mengingat $tan^2\theta + sec^2\theta = 1$

  $sec^2\theta - 1 = tan^2\theta$ sehinga :

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = sin^2\theta(tan^2\theta)$$

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = sin^2\theta\left(\frac{sin^2\theta}{cos^2\theta}\right)$$

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = sin^2\theta\ sin^2\theta\left(\frac{1}{cos^2\theta}\right)$$

  $$tan^2\theta - sin^2\theta = sin^4\theta\ sec^2\theta$$

  Contoh :

  Tunjukkanlah kesahihan identitas $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1-sin\theta}$!

  $$1 - sin^2\theta = cos^2\theta$$

  $$cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

4. RUMUS TRIGONOMETRIK

4.1 Jumlah dan selisih sudut

$$\cos(\theta + \emptyset) = cos\theta cos\emptyset - sin\theta sin\emptyset$$

$$\cos(\theta - \emptyset) = cos\theta cos\emptyset + sin\theta sin\emptyset$$

$$\sin(\theta + \emptyset) = sin\theta cos\emptyset + cos\theta sin\emptyset$$

$$\sin(\theta - \emptyset) = cos\theta cos\emptyset - sin\theta sin\emptyset$$

$$\tan(\theta + \emptyset) = \frac{\sin(\theta + \emptyset)}{\cos(\theta + \emptyset)} = \frac{sin\theta cos\emptyset + cos\theta sin\emptyset}{cos\theta cos\emptyset - sin\theta sin\emptyset} = \frac{tan\theta + tan\emptyset}{1 - tan\theta tan\emptyset}$$

$$\tan(\theta - \emptyset) = \frac{tan\theta - tan\emptyset}{1 + tan\theta tan\emptyset}$$

4.2 Sudut Ganda

$$sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$$

$$cos\ 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 2cos^2\theta - 1 = 1 - 2sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2tan\theta}{1 - tan^2\theta}$$

4.3 Jumlah dan selisih Rasio

$$sin\theta + sin\emptyset = 2\sin\frac{\theta+\emptyset}{2}\ cos\frac{\theta-\emptyset}{2}$$

$$sin\theta - sin\emptyset = 2\cos\frac{\theta + \emptyset}{2}\ sin\frac{\theta - \emptyset}{2}$$

$$cos\ \theta + cos\emptyset = 2\cos\frac{\theta + \emptyset}{2}\ cos\frac{\theta - \emptyset}{2}$$

$$cos\theta - cos\emptyset = -2\sin\frac{\theta + \emptyset}{2}\ cos\frac{\theta - \emptyset}{2}$$

4.4 Hasil Kali Rasio

$$2\ sin\theta\ cos\emptyset = \sin(\theta + \emptyset) + \ sin\ (\theta - \emptyset)$$

$$2cos\theta\ cos\emptyset = \cos(\theta + \emptyset) + cos\ (\theta - \emptyset)$$

$$2\ sin\theta\ sin\emptyset = \cos(\theta - \emptyset) - \ cos\ (\theta + \emptyset)$$

LATIHAN

1. Konversilah sudut $81°18'23''$ menjadi format desimal !
2. Konversilah sudut $63{,}216°$ menjadi derajat, menit, dan detik !
3. Konversilah sudut-sudut berikut menjadi radian hingga 2 tempat desimal :
   a. $31°$
   b. $48{,}15°$
   c. $225°$
4. Konversilah sudut – sudut berikut menjadi derajat hingga 2 tempat desimal :
   a. 1,784 rad
   b. $\frac{3\pi}{4} rad$
   c. $\frac{4\pi}{5}\ rad$
5. Carilah nilai – nilai dari setiap rasio trigonometrik berikut :
   a. $tan 27°$
   b. $sin\frac{\pi}{5}$
6. Diketahui satu sisi dan hipotenusa suatu segitiga siku – siku dengan panjang 6,4 dan 9,1. Carilah panjang sisi yang lain !
7. Tunjukkan bahwa segitiga dengan sisi 5, 11, dan 12, bukanlah segitiga siku – siku !
8. Berapakah panjang diagonal persegi yang panjang sisinya $\sqrt{2}$!
9. Buktikan identitas trigonometrik berikut :
   a. $(sin\theta - cos\theta)^2 + (sin\theta + cos\theta)^2 = 2$
   b. $\frac{cos\theta + sin\theta}{cos\theta - sin\theta} = 1 + \frac{2\tan\theta}{1 - tan\theta}$
10. Carilah nilai dari $\sin 135° \cos 225° + \tan 240°$

BAB VI
DIFERENSIASI

Diferensiasi dalam kalkulus dijelaskan dengan menggunakan konsep limit fungsi. Pada matematika teknik, diferensiasi dijelaskan dengan menggunakan konsep gradien garis lurus seperti yang diuraikan *K.A Stroud* dan *Dexter J. Booth* berjudul *Engineering Mathematics*, *Fifth Edition* halaman 279 (buku terjemahan).

1. ATURAN TURUNAN

- $f(x) = k \qquad \forall\, k = konstanta$

  $f^{'}(x) = 0$
- $f(x) = ax$

  $f^{'}(x) = a$
- $f(x) = x^n$

  $f^{'}(x) = n.x^{n-1}$
- $(f \pm g)^{'}(x) = f^{'}(x) \pm g^{'}(x)$
- $(f.g)^{'}(x) = f(x)g^{'}(x) + g(x)f^{'}(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(x) = \frac{g(x)f^{'}(x) - f(x)g^{'}(x)}{g(x)^2}$

2. TURUNAN STANDAR

- $f(x) = \sin x$

  $f^{'}(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x$

  $f^{'}(x) = -\sin x$
- $f(x) = e^x$

  $f^{'}(x) = e^x$
- $f(x) = \ln x$

$$f^{'}(x) = \frac{1}{x}$$

Contoh :

Tentukan diferensiasi $y = \tan x$!

$$y = \frac{sinx}{cosx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)f^{'}(x) - f(x)g^{'}(x)}{g(x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2 x$$

3. ATURAN RANTAI

Untuk mendiferensiasikan suatu fungsi dari fungsi, kita terlebih dulu harus memperkenalkan aturan rantai. Misalkan $y = \sin(2x - 3)$. Terlebih dahulu kita asumsikan $u = ((2x - 3)$ yang berarti $y = \sin u$ dengan $u = 2x - 3$.

Jika x bertambah sebesar $\delta x, u$ akan bertambah sebesar δu dan kemudian y akan bertambah sebesar δy, yang artinya $x \to x + \delta x, u \to u + \delta u\; dan\; y \to y + \delta y$. Sampai disini, kenaikan $\delta x, \delta u, dan\; \delta y$ semuanya dalam nilai terhingga oleh sebab itu kita dapat mengatakan bahwa $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \times \frac{\delta u}{\delta x}$ karena δu dalam $\frac{\delta y}{\delta u}$ akan meniadakan δu dalam $\frac{\delta u}{\delta x}$.

Jika $\delta x \to 0$, maka $\delta u \to 0\; dan\; \delta y \to 0$ juga $\frac{\delta y}{\delta x} \to \frac{dy}{dx}, \frac{\delta y}{\delta u} \to \frac{dy}{du}\; dan\; \frac{\delta u}{\delta x} \to \frac{du}{dx}$ dan pernyataan sebelum ini sekarang menjadi $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$. Pernyataan ini merupakan aturan rantai dan sangat berguna ketika kita ingin mengetahui turunan fungsi dari fungsi. Kesimpulannya bentuk umum dari aturan rantai adalah sebagai berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Contoh :

Tentukan diferensiasi dari $y = (3x + 5)^4$!

Misalkan $u = 3x + 5$

$\frac{du}{dx} = 3$

$y = u^4$

$\frac{dy}{du} = 4u^3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \times 3$

$\frac{dy}{dx} = 12u^3$

$\frac{dy}{dx} = 12\ (3x + 5)^3$

4. ATURAN RANTAI BERSUSUN

Sama halnya dengan aturan rantai, aturan rantai bersusun juga memiliki bentuk umum seperti berikut :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}$$

Contoh :

Tentukan diferensiasi dari $y = sin^4\ (x^2 + 3x)$!

Misa;kan :

$u = \sin v$

$\frac{du}{dv} = \cos v$

$y = u^4$

$\frac{dy}{du} = 4u^3$

$v = x^2 + 3x$

$\frac{dv}{dx} = 2x + 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cos v\,(2x+3)$

$\frac{dy}{dx} = 4sin^3 v\ \cos v\,(2x+3)$

$\frac{dy}{dx} = 4(2x+3)sin^3(x^2+3x)\ \cos(x^2+3x)$

$\frac{dy}{dx} = (8x+12\ )sin^3(x^2+3x)\ \cos(x^2+3x)$

5. PENGGUNAAN DIFERENSIASI

Dalam menerapkan diferensiasi dalam kehidupan sehari – hari, kita dapat menggunakan aturan turunan tingkat tinggi yaitu aturan turunan yang diturukan lebih dari satu kali turunan.

Contoh :

Tentukan turunan ke-3 dari $y = 4x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 12$!

$y' = 20x^4 - 9x^2 + 2x - 1$

$y'' = 80x^3 - 18x + 2$

$y''' = 240\,x^2 - 18$

Contoh penerapan diferensiasi :

Sebuah benda bergerak sepanjang garis koordinat sehingga posisinya $s = 2t^2 - 12t + 18$ dimana *s* dalam satuan cm dan *t* dalam satuan detik. Tentukan :

a. Kecepatan benda bilaman $t = 1 \; dan \; t = 6$

b. Kapan benda tersebut berhenti

c. kelajuan pada saat $t = 1$

d. percepatannya

Jawab :

a. kecepatan $v = \frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

Pada saat $t = 1$

$v = 4(1) - 12$

$v = -8 \; {}^{cm}/_{s}$

Pada saat $t = 6$

$v = 4(6) - 12$

$v = 12$ cm/s

b. kecepatannya berhenti pada saat $v = 0$

$$\frac{ds}{dt} = 4t - 12$$

$0 = 4t - 12$

$4t = 12$

$t = 3$

Artinya benda berhenti apabila $t = 3$

c. Kelajuan

Laju adalah harga mutlak dari kecepatan untuk setiap *t*. sehingga laju pada $t = 1$ adalah$|-8|$ = 8 cm

d. Percepatan

Percepatan adalah turunan kedua atau turunan dari kecepatan seperti berikut :

$v' = 4t - 12$

$v'' = 4$

Percepatan yang dialami benda adalah 8 cm/s

LATIHAN

1. Diferensiasikanlah fungsi-fungsi berikut :
   a. $y = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 7$ $[x = -2]$
   b. $y = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - x + 4$ $[x = 3]$
   c. $y = 4x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 2x + 3$ $[x = -2]$

2. Diferensiasikanlah fungsi-fungsi berikut :
   a. $y = x^5 \sin x$
   b. $y = e^x \cos x$
   c. $y = 2e^x \ln x$

3. Diferensiasikanlah fungsi-fungsi berikut :
   a. $y = \frac{\cos x}{x^3}$
   b. $y = \frac{\ln x}{x^3}$
   c. $y = \frac{\tan x}{e^x}$

4. Diferensiasikanlah fungsi-fungsi berikut :
   a. $y = (2x - 3)^3$
   b. $y = e^{3x+2}$
   c. $y = 4\cos(3x + 1)$

5. Tentukan nilai diferensiasi dari :
   a. $y = cos^5(4t - 19)$
   b. $y = sin^3(4x)$

BAB VII
INTEGRASI

Simbol $\int f(x)\ dx$ menyatakan integral dari $f(x)$ terhadap variabel x. integral terbagi atas dua yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Integral tak tentu tidak memiliki interval sedangkan integral tentu biasanya menggunakan batasan interval untuk mempermudah menghasilkan bilangan real dalam menentukan luas daerah kurva. Bentuk umum integrasi adalah sebagai berikut :

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Pada dasarnya integrasi merupakan proses kebalikan dari diferensiasi atau sering disebut sebagai anti turunan. Perhatikan uraian berikut :

$$\frac{d}{dx}(x)^4 = 4x^3$$

$$\int 4x^3 dx = \frac{4}{4}x^{3+1} = x^4 + c$$

Terlihat bahwa integrasi dari hasil diferensiasi akan menghasilkan fungsi awal dimana suku konstanta dalam pernyataan aslinya menjadi nol . Jadi jika kita tidak mengetahui asal usul turunan $4x^3$tersebut, kita tidak mengetahui nilai suku konstanta itu, apakah 0. +2, -6, atau nilai lainnya. Oleh sebab itu, setiap hasil sebuah integrasi akan mencantumkan nilai *c* disetiap hasil integrasinya. Selanjutnya integral seperti ini dikatakan integral tak tentu. Akan tetapi, pada keadaan tertentu nilai *c* mungkin saja diperoleh jika informasi lebih lanjut tentang integral itu tersedia. Misalkan $I = \int 4x^3 dx$, diketahui bahwa $I = 3$ apabila $x = 2$.

$I = x^4 + c$

$3 = 2^4 + c$

$c = -13$ sehingga untuk kasus ini, diperoleh nilai $I = x^4 - 13$.

1. ATURAN INTEGRASI

- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

- $\int kx^n \, dx = k \int x^n \, dx = k \ \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- $\int a \, dx = ax + c$
- $\int \sin x \ dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x \ dx = \sin x + c$
- $\int sec^2 x \ dx = \tan x + c$
- $\int e^x \, dx = e^x + c$
- $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c$

Contoh :

Tentukanlah $I = \int 2 \cos x \, dx$ jika diketahui bahwa $I = 7$, $x = \frac{\pi}{2} rad$.

$I = 2 \sin x + c$

$7 = 2 \sin \frac{\pi}{2} rad + c$

$7 = 2(1) + c$

$c = 5$

$I = 2 \sin x + 5$

Tentukanlah $I = \int (8x^3 - 3x^2 + 4x - 5) \, dx$ jika diketahui bahwa $I = 26$, $x = 2$!

$I = \frac{8x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 5x + c$

$I = 2x^4 - x^3 + 2x^2 - 5x + c$

$26 = 2(2)^4 - (2)^3 + 2(2)^2 - 5(2) + c$

$c = 4$

2. INTEGRASI FUNGSI DARI SUATU FUNGSI *X* LINEAR

Kita sering sekali harus untuk mengintegrasikan salah satu dari pernyataan yang ditunjukkan dalam daftar integral standar kita apabila variabel *x* digantikan oleh pernyataan linear dalam *x* seperti berikut :

$$\int (3x+2)^4 dx =$$

Misalkan $u = 3x + 2$

$$\frac{du}{dx} = 3$$

$$dx = \frac{1}{3} du$$

$$\int u^4 . \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \frac{u^5}{5} + c$$

$$\int \frac{1}{3} u^4 . du = \frac{u^5}{15} + c$$

$$\int \frac{1}{3} u^4 . du = \frac{(3x+2)^5}{15} + c$$

3. INTEGRASI DENGAN PECAHAN PARSIAL

Pada bab terdahulu kita sudah mempelajari pecahan parsial. Bab ini akan menerapkan metode pecahan parsial tersebut dalam kasus integrasi sebagai berikut :

Tentukanlah $\int \frac{5x+2}{3x^2+x-4}\ dx$!

$$\int \frac{5x+2}{3x^2+x-4}\ dx = \int \frac{A}{(3x+4)} + \frac{B}{(x-1)}\ dx$$

$$\frac{5x+2}{3x^2+x-4} = \frac{A(x-1)+B(3x+4)}{(3x+4)(x-1)}$$

$$5x + 2 = A(x-1) + B(3x+4)$$

Kita harus 0 kan A untuk memperoleh B, dan sebaliknya harus 0 kan B untuk memperoleh A.

$$x - 1 = 0\ maka\ x = 1$$

$$5(1) + 2 = A(1-1) + B(3(1)+4)$$

$$\boldsymbol{B = 1}$$

$$3x + 4 = 0\ maka\ x = -\frac{4}{3}$$

$$5\left(-\frac{4}{3}\right)+2=A\left(\left(-\frac{4}{3}\right)-1\right)+B(3(\left(-\frac{4}{3}\right))+4)$$

$\boldsymbol{A=2}$

Sehingga :

$$\int \frac{5x+2}{3x^2+x-4}\ dx=\int \frac{A}{(3x+4)}+\frac{B}{(x-1)}\ dx$$

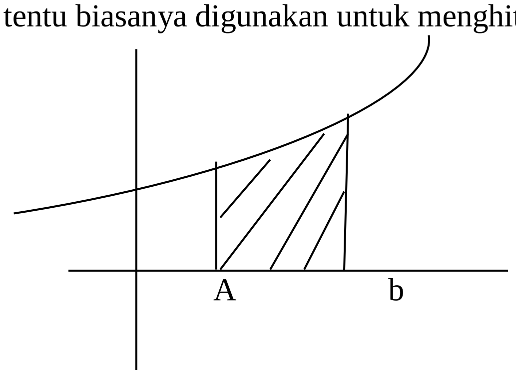
$$\int \frac{5x+2}{3x^2+x-4}\ dx=\int \frac{2}{(3x+4)}+\frac{1}{(x-1)}\ dx$$

$$\int \frac{5x+2}{3x^2+x-4}\ dx=\ 2\ln(3x+4)\left(\frac{1}{3}\right)+\ln(x-1)+C$$

$$\int \frac{5x+2}{3x^2+x-4}\ dx=\frac{2}{3}\ln(3x+4)+\ln(x-1)+C$$

4. LUAS DAERAH KURVA

Sejauh ini kita membicarakan integrasi tak tentu dan sekarag tiba kita dipembahasan integrasi tentu. Integrasi tentu biasanya digunakan untuk menghitung luas daerah.



$$\int_{x=b} y\ dx-\int_{x=a} y\ dx=\int_a^b y\ dx$$

Ketentuan $b>a$, dimana bilangan a dan b disebut batas integral tentu.

Contoh :

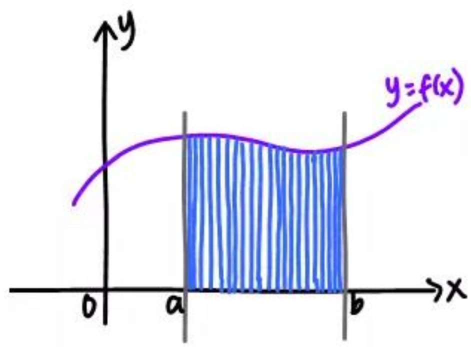
Tentukan luas yang dibatasi oleh kurva $y=3x^2+6x+8$, sumbu x dan ordinat $x=1\ dan\ x=3$!

$$L = \int_1^3 3x^2 + 6x + 8\,dx = [x^3 + 3x^2 + 8x]\begin{matrix}3\\1\end{matrix}$$

$$L = \int_1^3 3x^2 + 6x + 8\,dx = [(3)^3 + 3(3)^2 + 8(3) - ((1)^3 + 3(1)^2 + 8(1)]$$

$$L = \int_1^3 3x^2 + 6x + 8\,dx$$

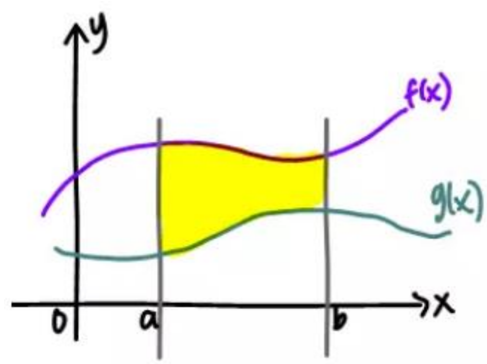
$$L = 66\ satuan^2$$



Luas daerah yang diarsir dibatasi oleh *a* dan *b* yaitu :

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

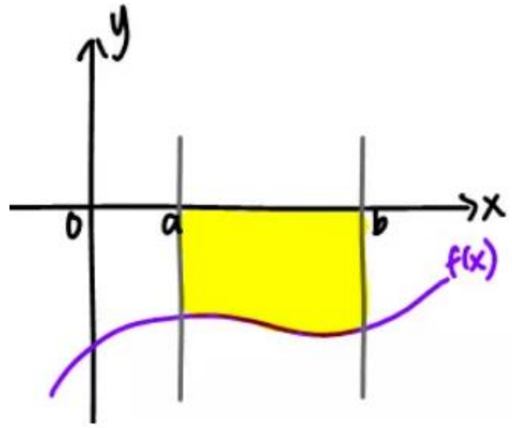
Bagaimana jika grafik di atas dibatasi dua fungsi seperti berikut :



$$L = Atas - Bawah$$

$$l = \int_a^b f(x)dx - g(x)dx$$

Bagaimana jika kurva berada dibawah sumbu x seperti berikut :



$$L = Atas - Bawah$$

Terlihat yang berada di bagian atas adalah sumbu x yang artinya $g(x) = 0 \; atau \; y = 0$, dan terdapat fungsi lain $y = f(x)$ sehingga menghitung luas daerah kurvanya adalah sebagai berikut :

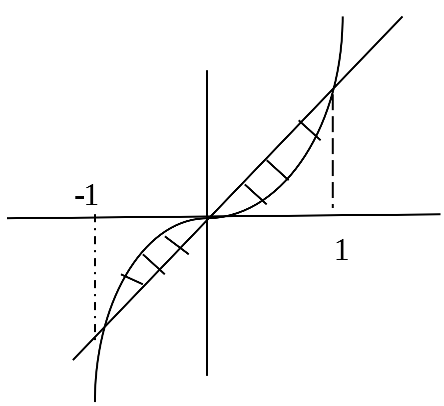
$$L = \int_a^b g(x)dx - f(x)dx$$

$$L = \int_a^b 0 \; dx - f(x)dx$$

$$L = \int_a^b -f(x)dx$$

Contoh :

Tentukan luas yang dibatasi kurva diantara kurva $y = x^2$ dan garis $y = x$.



Untuk menentukan batasnya, kita ekuivalenkan persamaan kurva dan garis seperti berikut :

$$x^3 = x$$
$$x^3 - x = 0$$
$$x\,(x^2 - 1) = 0$$

$$x = 0$$
$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$A_1 = -\int_{-1}^{0} x^3 - x\, dx$$
$$A_1 = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$$
$$A_1 = \frac{1}{4}$$

Sebenarnya kita dapat langsung mengalikan A_1 dengan 2. Hasilnya akan sama jika kita kembali menentukan luas untuk A_2 seperti berikut :

$$A_2 = \int_{0}^{1} x - x^3\, dx$$
$$A_2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}$$
$$A_2 = \frac{1}{4}$$

$$A_{total} = A_1 + A_2$$
$$A_{total} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$
$$A_{total} = \frac{1}{2}$$

LATIHAN

1. Tentukanlah integral tak tentu berikut :

a. $\int (5-6x)^2 dx$

b. $\int \frac{5}{2x+3} dx$

c. $\int 3^{2x-1} dx$

2. Tentukanlah $\int \left(6e^{3x-5} + \frac{4}{3x-2} - 5^{2x+1}\right) dx$

3. Tentukan integral berikut :

a. $\int \frac{6x+1}{4x^2+4x-3}\ dx$

b. $\int \frac{4x^2-9x-19}{2x^2-7x-4}\ dx$

c. $\int \frac{6x^2+2x+1}{2x^2+x-6} dx$

4. Jika $I = \int (8x^3 + 3x^2 - 6x + 7)\ dx$, tentukanlah nilai I apabila $x = -3$, diketahui bahwa apabila $x = 2, I = 50$.

5. Tentukanlah luas yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, sumbu x dan ordinat yang dinyatakan dalam hal – hal berikut :

a. $y = x^2 - 3x + 4, \quad x = 0\ dan\ x = 4$

b. $y = 3x^2 + 5, \quad x = -2\ dan\ x = 3$

c. $y = x^3 + 10, \quad x = -1\ dan\ x = 2$

d. $y = x^2 - 4x + 20,\ y = 3x,\ x = 0\ dan\ x = 4$

BAB VIII
BILANGAN KOMPLEKS

Ketika kita dihadapkan pada kondisi dimana kita harus menentukan akar kuadrat dari – 64. Tentu saja tidak satupun yang benar, karena +8, dan – 8 adalah akar kuadrat dari 64 dan bukan – 64. Sebenarnya $\sqrt{-64}$ tidak dapat dinyatakan dengan bilangan biasa, karena tidak ada bilangan real yang kuadratnya merupakan kuantitas negatif. Akan tetapi $-64 = -1 \times 64$ dan oleh sebab itu kita dapat menulis :

$$\sqrt{-64} = \sqrt{-1 \times 64} = \sqrt{-1}\sqrt{64} = 8\sqrt{-1}$$

Tentu saja kita masih dihadapkan dengan $\sqrt{-1}$, yang tidak dapat dihitung seperti bilangan real karena alasan yang sama seperti di atas, tetapi jika kita menulis huruf *i* sebagai pengganti $\sqrt{-1}$ maka $\sqrt{-64}$ dapat ditulis menjadi 8i. Dalam hal ini kita menyelesaikan kasus ini dengan menggunakan bilangan kompleks. Oleh karena *i* menyatakan $\sqrt{-1}$ marilah kita perhatikan pangkat-pangkat dari *i* berikut :

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$

$i^3 = (i^2)i = (-1) \times \sqrt{-1} = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

Bilangan kompleks ialah bilangan yang terdiri dari bilangan real dan imajiner. Misalkan $z = 3 + 5i$, dimana 3 disebut bilangan real atau ditulis dengan $Re\ (z) = 3$ dan 5 disebut bilangan imajiner atau ditulis dengan $Im(z) = 5$.

1. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN BILANGAN KOMPLEKS

Walaupun bagian real dan imajiner tidak dapat digabungkan, kita dapat menghilangkan tanda kurung dan menjumlahkan suku – suku yang jenisnya sama seperti berikut :

$(4 + 5i) + (3 - 2i) = (4 + 3) + (5 - 2)i$

$(4 + 5i) + (3 - 2i) = 7 + 3i$

$(4 + 7i) - (2 - 5i) = (4 - 2) + (7 + 5)i$

$(4 + 7i) - (2 - 5i) = 2 + 12i$

Ini sangat mudah, selama anda ingat bahwa bagian real dan bagian imajiner harus dioperasikan secara terpisah persis seperti suku – suku *x* dan *y* pada pernyataan aljabar.

2. PERKALIAN BILANGAN KOMPLEKS

Perkalian bilangan kompleks dilakukan persis sama dengan perkalian aljabar seperti berikut :

$(3 + 4i)(2 + 5i) = 6 + 15i + 8i + 20i^2$

$(3 + 4i)(2 + 5i) = 6 + 23i + 20(-1)$

$(3 + 4i)(2 + 5i) = -14 + 23i$

Perhatikan bahwa ketika kita melakukan perhitungan bilangan kompleks, hasil perhitungan kita umumnya juga merupakan bilangan kompleks. Sekarang coba anda kerjakan soal berikut :

$(5 + 8i)(5 - 8i) = 25 - 40i + 40i - 64i^2$

$(5 + 8i)(5 - 8i) = 25 - 64(-1)$

$(5 + 8i)(5 - 8i) = 89$

Terlepas dari apa yang telah kita lihat di atas, disini kita memiiki hasil yang tidak mengandung suku *i*. sehingga hasilnya merupakan bilangan real. Lihatlah pada kedua bilangan kompleks yang baru saja kita kalikan. Kedua bilangan kompleks tersebut identik (sama) kecuali pada tanda ditengah tanda kurungnya. Sepasang bilangan kompleks seperti ini disebut bilangan kompleks konjugat dan hasil kali dua bilangan kompleks konjugat selalu bilangan real.

$(4 + 5i)\ dan\ (4 - 5i)$ adalah bilangan kompleks konjugat

$(5 - 3i)\ dan\ (-5 + 3i)$ adalah bukan bilangan kompleks konjugat

$(6+2i)\ dan\ (2+6i)$ adalah bukan bilangan kompleks konjugat

3. PEMBAGIAN BILANGAN KOMPLEKS

Pembagian pada bilangan kompleks sangat mudah dilakukan seperti berikut :

$$\frac{5-4i}{3}=\frac{5}{3}-\frac{4}{3}i$$

Tetapi apa yang harus kita lakukan jika menemukan soal pembagian bilangan kompleks berikut :

$$\frac{7-4i}{4+3i}=\frac{7-4i}{4+3i}\ \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$\frac{7-4i}{4+3i}=\frac{28-21i-16i+12(-1)}{16-9(-1)}$$

$$\frac{7-4i}{4+3i}=\frac{16-37i}{25}$$

$$\frac{7-4i}{4+3i}=\frac{16}{25}-\frac{37}{25}i$$

Kesimpulannya untuk membagi suatu bilangan kompleks dengan bilangan kompleks lainnya, kita harus mengalikan pembilang dan penyebutnya dengan konjugat penyebut bilangan kompleks yang bersangkutan. Proses ini akan mengkonversi penyebut menjadi bilangan real dan langkah akhir kemudian dapat diselesaikan.

4. BILANGAN KOMPLEKS YANG SAMA

Bilangan kompleks yang dikatakan sama jika kedua bagian realnya sama dan kedua bagian imajinernya sama.

Contoh :

$x+yi=5+4i$ dari soal ini dapat kita simpulkan $x=5\ dan\ y=4$.

$a+bi=6-3i$ dari soal ini dapat kita simpulkan $a=6\ dan\ b=-3$.

Sekarang jika $(a+b)+(a-b)i = 7+2i$ tentukanlah nilai a dan b.

$a+b = 7 \; dan \; a-b = 2$

Karena kedua bagian realnya sama dan kedua bagian imajinernya sama maka terdapat dua persamaan simultan yang dari sini anda akan dapat menentukan nilai – nilai *a* dan *b*.

$$\begin{array}{ll} a+b = 7 & \\ \underline{a-b = 2} & + \\ 2a \quad = 9 & \\ a \quad = \dfrac{9}{2} & \end{array}$$

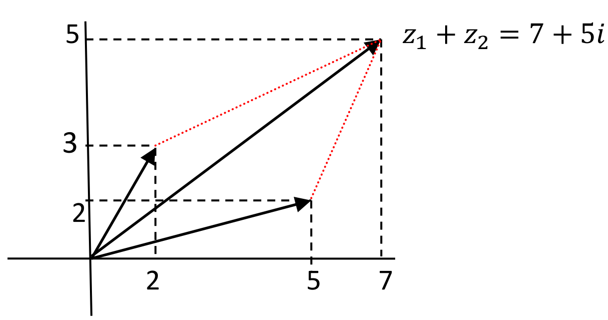
$$a+b = 7$$

$$\frac{9}{2} + b = 7$$

$$b = \frac{5}{2}$$

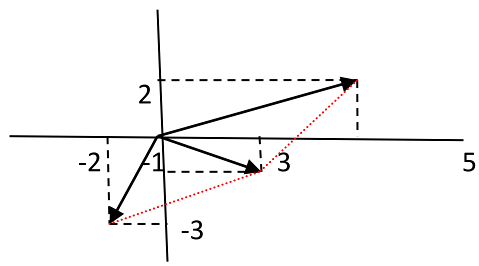
5. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN BILANGAN KOMPLEKS SECARA GRAFIS

Marilah kita jumlahkan $z_1 = 5+2i \; dan \; z_2 = 2+3i$ dengan menggunakan diagram Argand. Jika kta menambakan vektor - vektor, vektor - vektor tersebut haruslah digambar seperti rantai. Dengan demikian penjumlahan bilangan kompleks di atas diberikan oleh vektor yang menghubungkan titik awal dengan ujung vektor terakhir sedemikian hingga membentuk sebuah bangun jajaran-genjang.



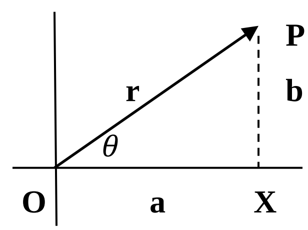
Bagaimana kita melakukan pengurangan ? Kita melakukan pengurangan dengan cara yang sama dengan strategi berikut :

$z_1 + (-z_2) = (5 + 2i) + (-2 - 3i) = 3 - i$



6. BENTUK POLAR SUATU BILANGAN KOMPLEKS

Pada diagram Argand misalkan OP merupakan vektor $a + bi$. Misalkan r merupakan panjang vektor tersebut dan θ adalah sudut antara OP dan OX.



Maka $r^2 = a^2 + b^2$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

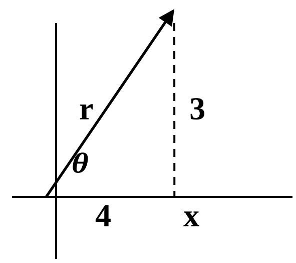
$\theta = tan^{-1}\dfrac{b}{a}$

$a = r\cos\theta\ dan\ b = r\sin\theta$

Karena $z = a + bi\ maka\ z = rcos\ \theta + r\sin\theta\ i\ atau\ z = r(\cos\theta + \sin\theta\ i)$, Ini disebut bentuk polar bilangan kompleks $a + bi$.

Contoh :

Nyatakanlah $z = 4 + 3i$ dalam bentik polar !



$r^2 = a^2 + b^2$

$r^2 = 4^2 + 3^2$

$r = 5$

$\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\theta = tan^{-1}\frac{3}{4} = 36°52'$

$z = a + bi = r(\cos\theta + \sin\theta\ i)$

$z = 5(\cos 36°52' + \sin 36°52'\ i)$

Kita memiiki nama khusus untuk nilai *r* dan θ seperi berikut :

$z = a + bi = r(\cos\theta + \sin\theta\ i)$

r disebut modulus bilangan kompleks *z* dan sering disingkat menjadi '*mod z'* atau ditandai dengan $|z|$. Dengan demikian jika $z = 2 + 5i$ maka $|z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, θ disebut *argumen* bilangan kompleks dan dapat disingkat menjadi *'arg z'* jadi $z = 2 + 5i$, $maka$ arg $z = 68°12'$.

7. BENTUK EKSPONENSIAL SUATU BILANGAN KOMPLEKS

Masih terdapat cara lain untuk menyatakan bilangan kompleks yang harus kita selesaikan. Dalam buku *K.A Stroud* dan *Dexter J. Booth* diuraikan bahwa $r(cos\theta + \sin\theta\ i)\ dapat\ ditulis\ sebagai\ re^{i\theta}$. Ini disebut bentuk eksponensial bilangan kompleks.

Bentuk ini dapat diperoleh dari bentuk polar dengan sangat mudah karena nilai *r* adalah sama dan sudut θ adalah sama untuk keduanya. Akan tetapi, penting untuk kita ingat bahwa dalam bentuk eksponensialnya, sudut haruslah dalam *radian*.

Contoh :

Ubahlah bentuk polar $5(\cos 60° + \sin 60°\, i)$ menjadi bentuk eksponensialnya !

$r = 5$

$\theta = 60° = \dfrac{\pi}{3} rad$

Sehingga bentuk eksponensialnya ialah $5e^{\frac{\pi}{3}i}$

Dan sekarang bagaimana dengan sudut negatif ? perhatikan uraian berikut :

Kita ketahui $e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta\, i$

Jika kita ganti θ dengan – θ dalam hasil ini, kitaa peroleh :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + \sin\theta\, i$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - \sin\theta\, i$$

Terdapat satu operasi lagi yang belum dapat kita lakukan untuk bilangan kompleks sebelum ini. Yakni untuk mencari logaritma bilangan kompleks. Bentuk eksponen sekarang telah membuat kita dapat melakukan pencarian logaritma ini, karena bentuk eksponensial hanya terdiri atas hasil kali dan pangkat.

$$z = re^{i\theta}$$

Maka kita dapat mengatakan :

$$\ln z = \ln r + \theta\, i$$

Contoh :

Tentukan logaritma dari $z = 6{,}42e^{1{,}57\, i}$!

$\ln z = \ln 6{,}42 + 1{,}57\, i$

$\quad = 1{,}8594 + 1{,}57\, i$ (hasilnya merupakan bilangan kompleks)

Untuk meringkas dari uraian – uraian di atas, dapat dismpulkan terdapat 3 cara untuk menyatakan suatu bilangan kompleks yaitu :

a. $z = a + bi$

b. $z = r(\cos\theta + \sin\theta\ i)$ bentuk polar

c. $z = re^{i\theta}$ bentuk eksponensial

8. MASALAH LOKUS – LOKUS

Sebenarnya sebelum sampai pada materi ini kita harus memahami materi lain seperti materi lebih lanjut mengenai bilangan kompleks dalam bentuk polar, teorema DeMoivre dan materi lainnya yang dapat dilihat pada buku *K.A Stroud* dan *Dexter J. Booth* Edisi Kelima. Modul ini hanya membahas sebagian dari materi bilangan kompleks karena sebenarnya masalah lokus ini termasuk dalam bilangan kompleks II artinya tercantum pada matematika teknik selanjutnya. Kita sering diminta mencari lokus (tempat kedudukan) suatu titik yang bergerak pada diagram Argand dengan suatu kondisi yang telah ditentukan seperti berikut :

Jika $z = x + yi$, carilah lokus yang didefinisikan sebagai $\arg z = \frac{\pi}{4}$!

arg $z = tan^{-1}\ \dfrac{y}{x}$

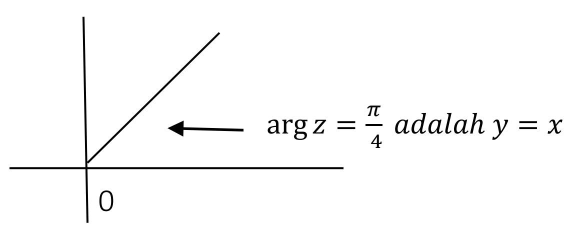
$tan^{-1}\dfrac{y}{x} = \dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{y}{x} = \tan\dfrac{\pi}{4}$

$\dfrac{y}{x} = 1$

$y = x$

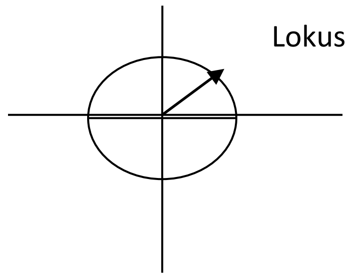
Jadi lokus $\arg z = \frac{\pi}{4}$ dengan demikian adalah garis lurus $y = x\ dan\ y > 0$



Jika $z = x + yi$, carilah lokus yang didefinisikan oleh $|z| = 5$. Kita ketahui bahwa dalam hal ini $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Lokus ini didefinisikan sebagai :

$5 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$25 = x^2 + y^2$ sebuah lingkaran dengan pusat di titik asal dan dengan radius 5



Lokus $|z| = 5$ $yaitu$ $x^2 + y^2 = 25$

LATIHAN

1. Nyatakanlah dalam bentuk $a + bi$:
   a. $(4 - 7i)(2 + 3i)$
   b. $(5 + 2i)(4 - 5i)(2 + 3i)$
   c. $\frac{4+3i}{2-i}$

2. Nyatakanlah dalam bentuk polar :
   a. $3 + 5i$
   b. $-6 + 3i$
   c. $-4 - 5i$

3. Jika $(2 + 3i)(3 - 4i) = x + yi$, tentukanlah nilai *x* dan *y !*

4. Titik – titik A, B, C, D pada diagram Argand, masing – masing menggambarkan bilangan kompleks $(9 + i), (4 + 13\ i), (-8 + 8i), (-3 - 4i)$. Tunjukkan bahwa ABCD merupakan bujur sangkar !

5. Jika $z = x + yi$, dimana x dan y adalah *real*, tunjukkanlah bahwa lokus $\left|\frac{z-2}{z+2}\right| = 2$ merupakan suatu lingkaran dan tentukanlah pusat dan radiusnya !

Daftar Pustaka

Anton, H. (2008). *Aljabar Linear*. Erlangga. Jakarta

HÖllger, S. (1992). *Matematika Teknik Untuk Kejuruan Logam.* Katalis. Jakarta

Kawulur, M.P.Y. (2019). *Modul Matematika Teknik* . Politeknik Negeri Manado. Manado

Stroud, K. A., & Booth, D. J. (2020). *Engineering Mathematics (terjemahan edisi kelima).* Erlangga. Jakarta

Purcell, E. J. (1982). *Kalkulus dan Geometri Analitis (terjemahan edisi kelima).* Erlangga. Jakarta